Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA1112)
3er Examen Parcial (38 %)
Ene-Mar 2018

Turno 5-6
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (6 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)^{2x^2}$

Solución: Como la función exponencial es continua en todo su dominio, $\lim\limits_{x\to a}\exp\big(f(x)\big)=\exp\Big(\lim\limits_{x\to a}f(x)\Big)$ si $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ existe. Luego,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{2x^2}=\lim_{x\to\infty}\exp\left(2x^2\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right)=\exp\left(2\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right)\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'H}}}{=}\exp\left(2\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{-6/x^3}{1+3/x^2}}{-2/x^3}\right)\right)=\exp\left(6\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+3/x^2}\right)\right)=\exp(6)=e^6$$

Pregunta 2. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)^5}{\left(e^x+e^{-x}\right)^6}\,\mathrm{d}x$

Solución:

$$\int\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)^5}{\left(e^x+e^{-x}\right)^6}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^5\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^6\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\operatorname{senh}^5(x)}{\cosh^6(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\tanh^2(x)\right)^2\tanh(x)\operatorname{sech}(x)\,\mathrm{d}x\qquad\begin{aligned}u&=\operatorname{sech}(x)\\ \mathrm{d}u&=-\tanh(x)\operatorname{sech}(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(1-\operatorname{sech}^2(x)\right)^2\tanh(x)\operatorname{sech}(x)\,\mathrm{d}x\overset{\downarrow}{=}-\frac{1}{2}\int(1-u^2)^2\,\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{2}u+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{10}u^5+C=-\frac{1}{2}\operatorname{sech}(x)+\frac{1}{3}\operatorname{sech}^3(x)-\frac{1}{10}\operatorname{sech}^5(x)+C$$

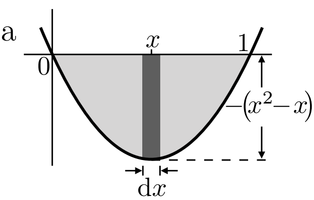
para cualquier valor de $C\in\mathbb{R}$.

Pregunta 3. Sea $\mathcal{R}$ la región del cuarto cuadrante acotada por la curva de ecuación $y = x^2 - x$.

a. (4 ptos.) Halle el área de $\mathcal{R}$

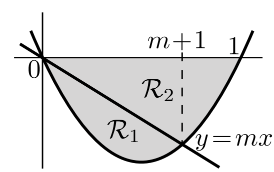
b. (4 ptos.) Para cada $m < 0$, la recta $y = mx$ divide a $\mathcal{R}$ en dos regiones, $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$. Halle el valor de m que haga que el área de $\mathcal{R}_1$ sea igual al área de $\mathcal{R}_2$.

Solución: El área de la región $\mathcal{R}$ viene dada por



$$\int_0^1 \Big(-\left(x^2 - x\right)\Big)\,\mathrm{d}x = 1/6$$

La recta $y = mx$, con $m < 0$, intersecta a la parábola $y = x^2 - x$ en los puntos $(0, 0)$ y $(m + 1, m^2 + m)$, ya que



$$mx = x^2 - x \;\Rightarrow\; x = 0 \;\text{ o }\; x = m + 1$$

El área de la región $\mathcal{R}_1$ viene dada por

$$\int_0^{m+1} \big(mx - (x^2 - x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(1 + m)^3$$

y el área de la región $\mathcal{R}_2$ viene dada por

$$\int_0^{m+1} (-mx)\,\mathrm{d}x + \int_{m+1}^{1} \Big(-\left(x^2 - x\right)\Big)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}m\big(3 + 3m + m^2\big)$$

Como el área total vale $1/6$ y las áreas de las regiones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ deben ser iguales, entonces el área de la región $\mathcal{R}_1$ debe ser igual a $1/12$. Luego,

$$\frac{1}{6}(1 + m)^3 = \frac{1}{12} \quad\Rightarrow\quad m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 1.$$

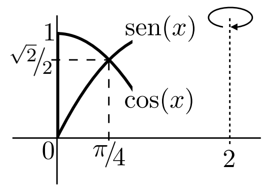
Pregunta 4. Considere la región acotada por las curvas $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$, el eje y y la recta vertical $x = \pi/4$. Sea S el sólido que se genera al hacer rotar esta región alrededor de la recta $x = 2$.

a. (4 ptos.) Exprese el volumen del sólido S mediante el método de arandelas.

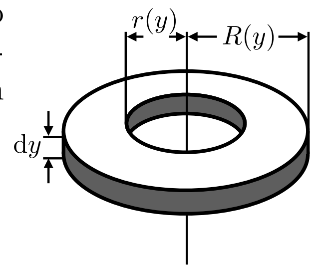
b. (4 ptos.) Exprese el volumen del sólido S mediante el método de cascarones.

c. (2 ptos.) Calcule el volumen del sólido S.

Solución: La región acotada por las curvas $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$, el eje y y la recta vertical $x = \pi/4$ está ilustrada en la figura a la derecha.



Para expresar el volumen mediante el método de arandelas hacemos cortes transversales. Para cada y entre 0 y 1 el diferencial de volumen viene dado por



$$\mathrm{d}V = \pi\Big(\big(R(y)\big)^2 - \big(r(y)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}y$$

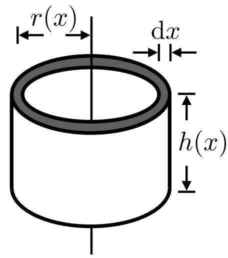
donde

$$r(y) = \begin{cases} 2 - \arccos(y) & , \text{ si } y \in \left[\sqrt{2}/2, 1\right] \\ 2 - \operatorname{arcsen}(y) & , \text{ si } y \in \left[0, \sqrt{2}/2\right] \end{cases} \quad \text{y} \quad R(y) \equiv 2$$

Así, el volumen viene dado por

$$\pi\int_0^{\sqrt{2}/2}\Big(4\operatorname{arcsen}(y) - \big(\operatorname{arcsen}(y)\big)^2\Big)\mathrm{d}y + \pi\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\Big(4\arccos(y) - \big(\arccos(y)\big)^2\Big)\mathrm{d}y$$

Para expresar el volumen mediante el método de cascarones hacemos cortes coaxiales. Para cada x entre 0 y $\pi/4$ el diferencial de volumen viene dado por



$$\mathrm{d}V = 2\pi\, r(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x$$

donde
$$r(x) = 2 - x \quad \text{y} \quad h(x) = \cos(x) - \operatorname{sen}(x)$$

Así, el volumen viene dado por

$$2\pi \int_0^{\pi/4} (2-x)\big(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\big)\, \mathrm{d}x$$

Finalmente, el volumen de sólido S es $\pi\Big(-2 + 4\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\Big)$.

Pregunta 5. (6 ptos.) Determine si la integral impropia $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x+e^x}$ es convergente.

Solución: Como $0 < \dfrac{1}{x+e^x} < \dfrac{1}{e^x}$ para todo $x \in [2,\infty)$ y $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x}$ es convergente, pues $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{\mathrm{d}x}{e^x} = \lim_{b\to\infty} \left(e^{-2} - e^{-b}\right) = e^{-2}$, el Criterio de Comparación establece que $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x+e^x}$ también es convergente.